Un modèle semi-stationnaire pour les industries minières

Jean Michel Lasry

Journée atelier FIME - 16 Juin 2016

(d'après : Yves Achdou, Pierre Noel Giraud, Jean Michel Lasry, Pierre Louis Lions, long term models for mining industries)

La demande de minerais

- On note $D(p) = X/p^{\theta}$ la fonction de demande,
- où X est un facteur qui traduit la croissance aléatoire de la demande globale. On suppose que l'on a :
- $dX/X = bdt + \sigma dW$

La cost curve

- chaque producteur de type i $(pour\ i = 1 \text{ à } N)$ possédant des réserves q peut produire
  - une quantité maximum $k_i q$, où k_i est une constante technique,
  - avec un coût c_i de production par unité produite constant.
- On note R_i la quantité de réserves totale possédée par les producteurs de type R_i
- En supposant les c_i classés par ordre croissant, cela revient à dire que la cost curve de l'industrie est constante par paliers et que le $i$ème palier est de taille $k_i R_i$

L'investissement dans le développement des réserves et des capacités de production

- les producteurs de type i peuvent investir dans la constitution de nouvelles réserves et capacités,
- un flux d'investissement $\alpha_i dt$ d'un producteur de taille q provoque une variation de réserves $dR_i = qf_i(\alpha_i/q)$ et une variation de capacité de production $k_i\, dR_i$
- où f_i est une fonction résultant de l'équilibre de l'offre et de la demande sur le marché du développement des réserves et capacités

Equation de l’équilibre MFG

- on peut vérifier que la répartition des réserves entre producteurs d’un même type n’a pas d’influence sur la dynamique globale.
- Les variables d’état collectives sont $X \; et \; R = (R_1, \dots, R_N)$
- Notons $qu_i(X, R)$ la valeur d’un unité de production dont les réserves sont q.
- L’équilibre MFG se traduit par un système d’équations
- $0 = -ru_i + Max_\alpha \left\{ f_i(\alpha)u_i - \alpha \right\} + Max_{\beta \le k_i}\{\beta(P - c_i)\} \; + X\partial_X u_i +$ ½$\sigma^2 X^2 \partial_{XX} u_i + \sum_j R_j (f_j(\alpha_j^*/R_j) - \beta_j^*)\partial_{R_j} u_i$
- avec
- $\alpha_j^* = ArgMax_\alpha \left\{ f_j(\alpha)u_j - \alpha \right\} \; et \; \beta_j^* = ArgMax_{\beta \le k_j}\{\beta(P - c_j)\}$

Une très bonne adéquation aux données sur très longue période

- Les cinq paramètres du modèle (pour N=1) peuvent être calibrés aux données sur très longue période (40 ans), ce qui montre une très bonne adéquation du modèle aux données à cette échelle de temps

La main invisible : l'équilibre MFG comme équilibre général

- En l'absence de frictions, cet équilibre MFG, peut s'écrire comme un équilibre général avec agents hétérogènes,
- Dans ce cas, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ est le gradient de la fonction valeur du planificateur virtuel.