Gestion actif passif par optimisation et application à l'ALM nucléaire d'EDF

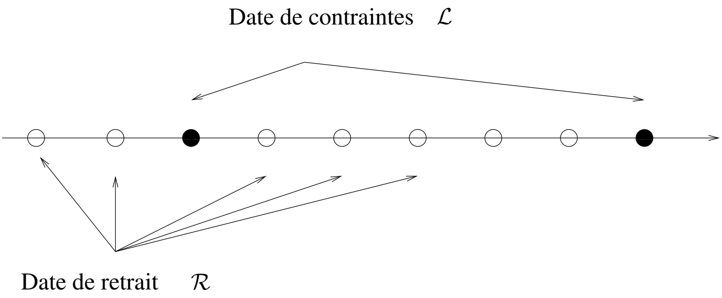
Séminaire FiME

17 Juin 2016

Table of contents

Contraintes de portefeuille

- Le portefeuille investi actualisé A_t doit rester au dessus du passif actualisé L_t aux dates $\mathcal{L}$ (tous les 6 mois).
- D_t somme des dotations actualisées effectuées depuis le début pour satisfaire la contrainte.
- Retrait du portefeuille tous les mois date $\mathcal{R}$.



Formule du passif actualisé

Formule du passif à la date t

Decaissement en euros constants

Actualisation reelle long terme

$$L_t = e^{(\gamma - r)t} \sum_{t_j > t, t_j \in \mathcal{R}} \hat{D}_{t_j} e^{-a_{LT}(t_j - t)}$$

Passif actualise date t

Inflation moins taux sans risque

Somme sur date futures des retraits

Gestion actuelle

- Gestion en constant mix 50% action-obligations.
- Dans ce nombreux cas théoriques (Fontana-Tankov), la gestion constant mix est optimale.
- Peut on faire mieux ? Que veut dire "mieux" ?

Distribution du portefeuille netté des dotations

Maturité $T = 20$ ans, $\gamma = 2\%$, $r = 2\%$, $a_{LT} = 2.6\%$, la DF s'intéresse à la distribution de $P_T = A_T - D_T - L_T$.

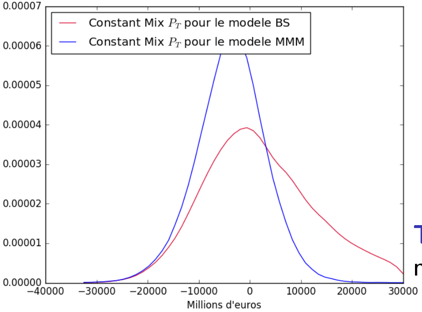


Figure – Distribution de P_T en millions d'Euro, modèles Black Scholes et Minimal Market Model, avec Gestion Constant Mix 50%

Quantile 1%	$\simeq$	-20
Quantile 5%	$\simeq$	-15
Quantile 20%	$\simeq$	$-7/10$

Table – Quantiles de P_T en milliards d'Euros

- BS (modèle peu réaliste surtout à long terme) exagère les gains,
- Les deux modèles en concordance sur les queues des "pertes".

Les modèles de prix

- Black Scholes pour actif actualisé

$$dS_t = S_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t)$$

$\mu = 7.5\%$, $\sigma = 18\%$.

- Minimal Market Model de Platen :

$$dS_t = \alpha_t dt + \sqrt{S_t \alpha_t} dW_t$$

  - $\alpha_t = \alpha_0 e^{\eta t}$,
  - Calage sur MSCI world de 1976-2016 :

$$\alpha_0 \simeq 2.317$$
$$\eta \simeq 0.0542$$

  - AOA vérifiée pour les portefeuilles à valeur positive.

Fonction d'optimisation

- Minimisation d'une fonction coût : $E\left(g(-P_T)\right)$,
- contrôle : $\phi = (\phi_t \in [0,1])$ proportion d'actifs risqués dans le portefeuille.
- Cas Black-Scholes

$$
\begin{aligned}
V(t, A_t, D_t) &= \min_{\phi} E\left(g(D_T + L_T - A_T) | A_t, D_t\right) \\
dA_t &= \phi_t A_t((\mu - r)dt + \sigma_t)dW_t
\end{aligned}
$$

- Cas MMM :

$$
\begin{aligned}
V(t, A_t, S_t, D_t) &= \min_{\phi} E\left(g(D_T + L_T - A_T) | A_t, S_t, D_t\right) \\
dA_t &= \phi_t \frac{A_t}{S_t}(\alpha_t dt + \sqrt{S_t \alpha_t} dW_t) \\
dS_t &= \alpha_t dt + \sqrt{S_t \alpha_t} dW_t
\end{aligned}
$$

- Dynamique de D_t : $dD_t = 1_{t \in \mathcal{L}}(L_t - A_t)^+$

Technique de résolution

Méthodes Déterministes de la librairie StOpt

- Utilisables pour BS,
- Pas utilisables pour le MMM (coefficients non Lipschitz)

Développement d'une méthode couplée :

- Monte Carlo pour la dynamique de S_t,
- Pour le MMM, discrétisation pour le niveau de S_t par une méthode de type quantification,
- Grille de discrétisation pour A_t, D_t.

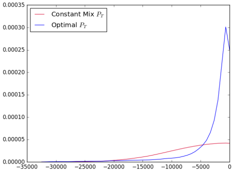
Mise en oeuvre dans la librairie StOpt :

- généricité de la mise en oeuvre (quant au modèle de prix)
- Parallélisation MPI, OPENMP de la librairie

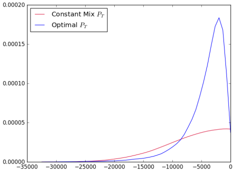
Paramètres de résolution

- 20 ans d'optimisation,
- Pas de discrétisation du portefeuille 200 millions,
- Pas de discrétisation de la dotation 500 millions,
- Nombre de trajectoires de Monte Carlo en optimisation :
  - 50000 pour BS, pas de discrétisation sur les niveaux de S_t,
  - 600000 pour le MMM, discrétisation sur 100 niveaux de S_t

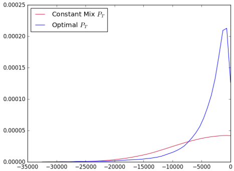
BS : distribution de P_T en millions d'euros pour quelques fonctions de pénalisation



(a) $g(x) = (x + 0.4x^2)1_{x>0}$



(b) $g(x) = (x + 0.4x^2 + 4e^{-4}x^3)1_{x>0}$



(c) $g(x) = (x + 0.4x^2 + 4e^{-5}x^3)1_{x>0}$

BS Quantiles de P_T , $g(x) = (x + 0.4x^2 + 4e^{-5}x^3)1_{x>0}$

Résultats obtenus avec 50000 simulations

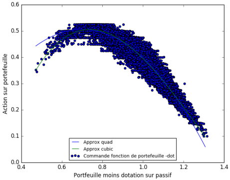
Quantile	Par optimisation	Constant Mix
1%	-20139	-20043
2%	-16612	-17730
5%	-11625	-14179
10%	-8439	-10922
20%	-5579	-6922

Table – Quantile de P_T en millions d'euros par optimisation et par constant mixt dans le modèle de Black Scholes

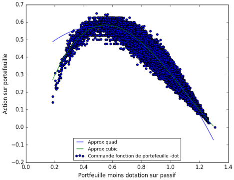
BS : vers une heuristique de simulation

Heuristique

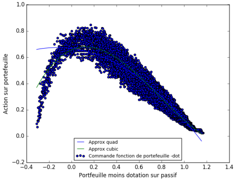
$$\phi_t = F\left(t, \frac{A_t - D_t}{L_t}\right)$$



(d) ϕ_t à 3 ans

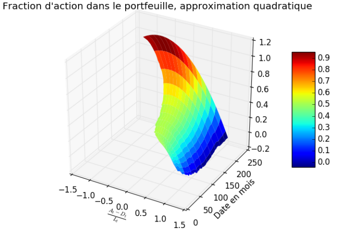


(e) ϕ_t à 8 ans

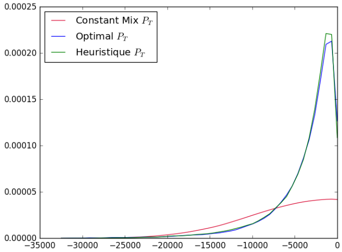


(f) ϕ_t à 15 ans

BS : heuristique quadratique linéaire en temps



(g) Approximation $F(t,x) = (a_0 + a_1 t) + (b_0 + b_1 t)x + (c_0 + c_1 t)x^2$



(h) Constant Mix, solution optimale et heuristique

BS : heuristique quadratique

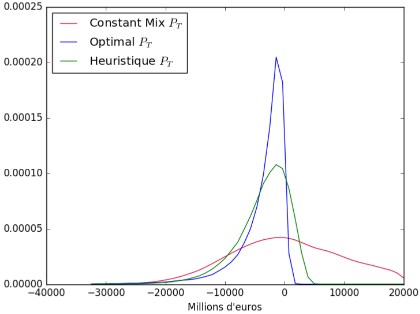
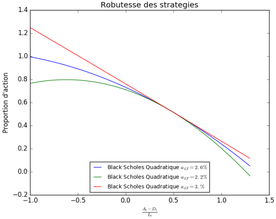


Figure – Heuristique $F(t, x) := F(x) = -0.113x^2 - 0.377x + 0.731$

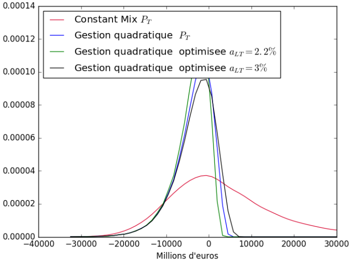
Quantile	Par optimisation	Constant Mix	heuristique
1%	-20139	-20043	-17917
5%	-11625	-14179	-12117
10%	-8439	-10922	-9535
20%	-5579	-6922	-6777

Table – Quantile de P_T par optimisation, constant mix et heuristique quadratique dans le modèle de Black Scholes

BS : influence de a_{LT} sur l'approximation quadratique



(a) Heuristique quadratique



(b) Cas $a_{LT} = 2.6\%$, constant mix, gestion quadratique, gestion quadratique optimisée avec $a_{LT} = 2.2\%$, gestion quadratique optimisée avec $a_{LT} = 3.\%$

MMM : $g(x) = x + 0.4x^2 + 4e^{-5}x^3$, heuristique linéaire quadratique

Modèle MMM :

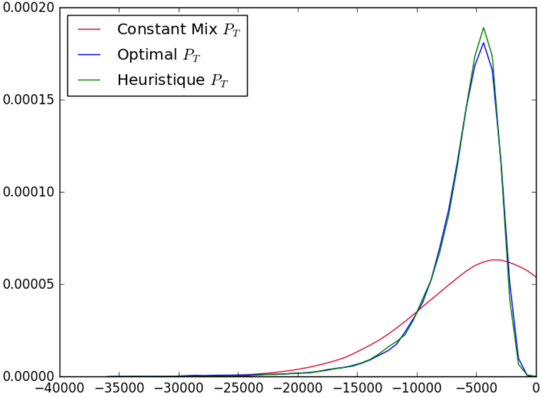


Figure – Heuristique

$F(t,x) = (a_0 + a_1 t) + (b_0 + b_1 t)x + (c_0 + c_1 t)x^2$

MMM :Heuristique quadratique

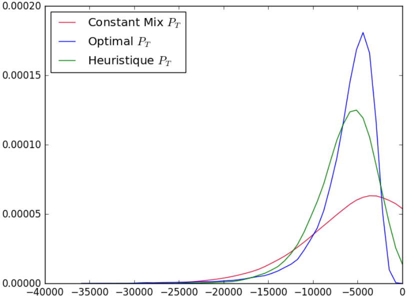


Figure – Heuritisque $F(t,x) := F(x) = 0.0487x^2 - 0.247x + 0.481$

Quantile	Par optimisation	Constant Mix	heuristique
1%	-20499	-20800	-16953
5%	-12798	-15113	-12824
10%	-10287	-12301	-10962
20%	-8120	-9131	-9025

Table – Quantile de $A_T - L_T - D_T$ par optimisation, constant mix et heuristique quadratique dans le modèle de Black Scholes

Conclusion

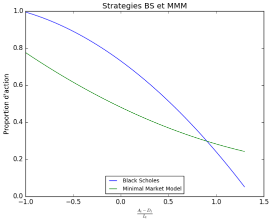


Figure – Comparaison des stratégies obtenues par les deux modèles

- Les deux stratégies approchées sont de même type :
  - On sécurise quand la cible est atteinte,
  - On prend d'autant plus de risques que l'on a fortement doté et que la valeur du portefeuille est faible
- La stratégie MMM est plus reserrée que la stratégie Black Scholes.
- Les stratégies sont stables par rapport à la valeur de a_{LT}.